临界生数学补弱训练（四）参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	B	D	C	C	D	B	BC	AC	ABD	BD

13	14	15	16
$12!\cdot 8!\cdot 3^7\cdot 2^{10}$；$12!\cdot 8!\cdot 3^7\cdot 2^9$	884	8	3

17. 证明：(1) 若分子上的整系数多项式为 $g(n)$，则它的系数不全被 p 整除．…… (1 分)
考虑 g 在 $\mathbb{Z}[x]$ 到 $\mathbb{F}_p[x]$ 的自然映射 σ 下的像，…… (2 分)
则这个像非零，且任意的 $x\in\mathbb{F}_p$ 都是 $\sigma(g)$ 的根．…… (3 分)
因此 $x^p-x\mid\sigma(g)$，…… (4 分)
$m\ge p$．…… (5 分)

(2) 由题意，只需要证明 $f(n)=n^m$ 的情况即可．…… (6 分)

注意到对 $0\le k\le m$，$\binom{n}{k}$ 是关于 n 的 k 次有理系数多项式，…… (7 分)
因此存在有理数 $a_0,\cdots,a_m$ 使得 $n^m=a_0\binom{n}{0}+\cdots+a_m\binom{n}{m}$，…… (8 分)
那么

$$F(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_j\binom{i}{j}=\sum_{j=0}^{m}a_j\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{j}=\sum_{j=0}^{m}\frac{a_j\left((j-1)\binom{1}{j}+(n+1-j)\binom{n+1}{j}\right)}{j+1},$$

展开后即为 $m+1$ 次多项式．…… (9 分)

同时，由于对所有大于 1 的整数 n 都有 $F(n)-F(n-1)=f(n)$，$F(n)-F(n-1)-f(n)$ 只能为零多项式，代入 $n=1$ 即得 $F(0)=0$．…… (10 分)

18. 证明：(1) 由于维数唯一，…… (3 分)
而且 $n=m$，$b_i=e_i$ 满足题意，所以只能 $n=m$．…… (6 分)

(2) 变基，设 $b_i=e_i$，$f(u,v)=u^TAA^Tv$，$g(u,v)=u^TBB^Tv$．…… (9 分)

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(e_i,e_j)g(e_i,e_j)&=\sum_{i,j}(AA^T)_{ij}(BB^T)_{ji}\\&=\operatorname{trace}AA^TBB^T\\&=\operatorname{trace}(B^TA(B^TA)^T)>0,\end{aligned}$$

即为所求．…… (12 分)

19. (1) 解：不失一般性，设 $a=b=1$．

设 $P_1=\left(\frac{p^2+1}{p^2-1},\frac{2p}{p^2-1}\right)$，$P_2=\left(\frac{q^2+1}{q^2-1},\frac{2q}{q^2-1}\right)$，$P_3=\left(\frac{r^2+1}{r^2-1},\frac{2r}{r^2-1}\right)$，
则 $l_1:\frac{p^2+1}{p^2-1}x-\frac{2p}{p^2-1}y=1$，$l_2:\frac{q^2+1}{q^2-1}x-\frac{2q}{q^2-1}y=1$，$l_3:\frac{r^2+1}{r^2-1}x-\frac{2r}{r^2-1}y=1$，
那么 $Q_3=\left(\frac{pq+1}{pq-1},\frac{p+q}{pq-1}\right)$，$Q_1=\left(\frac{qr+1}{qr-1},\frac{q+r}{qr-1}\right)$，$Q_2=\left(\frac{rp+1}{rp-1},\frac{r+p}{rp-1}\right)$，…… (2 分)
可得 $P_1Q_1:(2p-q-r+p^2q+p^2r-2pqr)x-2(p^2-qr)y+(2p-q-r-p^2q-p^2r+2pqr)=0$，
$P_2Q_2:(2q-p-r+pq^2+q^2r-2pqr)x-2(q^2-pr)y+(2q-p-r-pq^2-q^2r+2pqr)=0$，
$P_3Q_3:(2r-p-q+pr^2+qr^2-2pqr)x-2(r^2-pq)y+(2r-p-q-pr^2-qr^2+2pqr)=0$，

所以令 $A=p^2+q^2+r^2$，$B=pq+qr+rp$，$C=p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2$，$D=p^2qr+pq^2r+pqr^2$，$E=p^2q+q^2r+r^2p+p^2r+r^2q+q^2p$，$T=P_1Q_1\cap P_2Q_2$，计算得

$$T=\left(\frac{A-B+C-D}{-A+B+C-D},\frac{E-6pqr}{-A+B+C-D}\right),$$

对称，因此三线共点. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (4 分)

代入可得

$$x_T^2-y_T^2-1=3\left(\frac{(p-q)(q-r)(r-p)}{-A+B+C-D}\right)^2>0,$$

因此交点在 S 中. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (6 分)

(2) 证明：($\Leftarrow$) 设 $C:2py=x^2$，$P_1=(a,\frac{a^2}{2p})$，$P_2=(b,\frac{b^2}{2p})$，$P_3=(c,\frac{c^2}{2p})$，

则 $l_1:2py-a(2x-a)=0$，$l_2:2py-b(2x-b)=0$，$l_3:2py-c(2x-c)=0$.

三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的外接圆为 $\alpha l_1l_2+\beta l_2l_3+\gamma l_3l_1=0$，且 $(1,i,0)$ 在曲线上，· (8 分)

因此 $\alpha=(1+4c^2)(a-b)$，$\beta=(1+4a^2)(b-c)$，$\gamma=(1+4b^2)(c-a)$，代入 $(0,p/2)$ 可得焦点在圆上. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (9 分)

($\Rightarrow$) 非退化圆锥曲线可以为椭圆、双曲线或抛物线. 若 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，取 $l_1:y=b$，$l_2:y=-b$，$l_3:x=a$ 即为反例. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (10 分)

若 C 为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$，取 $l_1:x/a=y/b$，$l_2:x/a+y/b=0$，$l_3:x=a$，则 $Q_3=(0,0)$，$Q_2=(a,b)$，$Q_1=(a,-b)$，$F=(\sqrt{a^2+b^2},0)$ (另一个焦点与 Q_1,Q_2 不同侧)，外接圆圆心为 $\left(\frac{a^2+b^2}{2a},0\right)$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (11 分)

因此若焦点在外接圆上，必须 $\frac{a^2+b^2}{a}=\sqrt{a^2+b^2}$，无解，因此 C 只能为抛物线. (12 分)

20. 解：(1) 设 $f(t)=(1+t)^{100}$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (1 分)
$\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2 分)

由于 $\omega^2+\omega+1=0$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (3 分)
球的子集中大小除以 3 余 1 的有 $\frac{1}{3}(f(1)+\omega^2f(\omega)+\omega f(\omega^2))$ 个，⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (4 分)
即为 $\frac{2^{100}-1}{3}$ 个，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (5 分)
所以概率为 $\frac{1-2^{-100}}{3}$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (6 分)

(2) 设 $g(t,x)=\prod_{k=1}^{100}(1+tx^k)$，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (9 分)
则球的子集中大小除以 3 余 1 且编号和除 3 余 2 的有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{9}(g(1,1)+\omega^2g(\omega,1)+\omega g(\omega^2,1)\\&+\omega g(1,\omega)+g(\omega,\omega)+\omega^2g(\omega^2,\omega)\\&+\omega^2g(1,\omega^2)+\omega g(\omega,\omega^2)+g(\omega^2,\omega^2))\end{aligned}$$

个，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (10 分)
即为 $\frac{1}{9}(2^{100}-3\cdot2^{33}-1)$ 个，⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (11 分)
所以概率为 $(2^{100}-3\cdot2^{33}-1)/(3\cdot2^{100}-3)$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (12 分)

21. (1) 证明：设 $E:y^2=x^3-43x+166$，用 a_k 代表 (x_k,y_k). ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (1 分)

观察发现在 $E(\mathbb{Q})$ 中，$a_k=2a_{k-1}$，因此 $a_k=2^{k-1}a_1$. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2 分)

x,y 分别有周期相当于 a 有周期. ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (3 分)

a_1 的阶无限的情况下，a 的后缀显然也没有周期．设阶为 m，m 为奇数时周期即为 2 模 m 的阶．……………………………………………………………… (4 分)

若 m 为偶数，$\frac{m}{2}a_1$ 的阶为 2，而 $E(\mathbb{Q})$ 没有阶为 2 的元素（$y=0$ 时没有有理的 x）．

也就是说，$E(\mathbb{Q})$ 中的点阶数均为奇数，此时 a 必有周期，x 和 y 也有周期． (6 分)

(2) 解：计算判别式 $\Delta = -4(-43)^3 - 27(166)^2 = -425984 = -2^{15}\cdot 13$．………… (7 分)

由纳格尔–卢茨定理，y_1 为整数，且 $y_1^2 \mid \Delta$ 或 $y_1 = 0$（不可能）．…………… (8 分)

由题，$y_1 \geq 0$，因此讨论 $y = 1, 2, 4, 6, 16, 32, 64, 128$ 的情况，……………… (9 分)

解出所有有限阶点，为 $(3, 8)$，$(-5, 16)$ 和 $(11, 32)$．………………………… (10 分)

这些点的阶为 7，而 $2^3 \equiv 1 \pmod 7$，因此周期为 3．…………………… (11 分)

周期是质数，所以最小正周期也一定为 3．…………………………………… (12 分)

22. (1) 证明：用反证法证明．假设 x 与 x^{-1} 在同一个共轭类中，……………… (1 分)

则对任意 g，$gxg^{-1} \in C(x)$，$g^{-1}x^{-1}g \in C(x)$，……………………………… (2 分)

且两者互为逆．……………………………………………………………… (4 分)

由于 G 为奇数阶群，$a^2 = 1$ 的唯一解是 $a = 1$，$1 \notin C(x)$，……………… (6 分)

因此 $C(x)$ 中的元素可通过取逆一一配对，……………………………………… (8 分)

$|C(x)|$ 为偶数，…………………………………………………………… (10 分)

与 G 的阶数为奇数矛盾．…………………………………………………… (12 分)

(2) 证明：将 A 用 0 补成一个方阵不影响等式两边的值，因此可设 $n = m$．…… (2 分)

将要证的命题改写为 $\det(I - AA^T) - \det(I - A^T A) = 0$，则等式左边是关于 A 中系数的整系数多项式，…………………………………………………………… (3 分)

因此只需要证明 $R = \mathbb{C}$ 的情况下成立即可．……………………………… (5 分)

假设 A 可逆，则 AA^T 与 $A^T A$ 共轭，………………………………………… (6 分)

进而 $I - AA^T$ 与 $I - A^T A$ 也共轭，等式成立．…………………………… (7 分)

可对角化的矩阵是可逆矩阵的子集，……………………………………… (8 分)

而由哈密尔顿–凯莱定理可知可对角化复矩阵在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中稠密，……………… (10 分)

因此对不可逆的矩阵也有 $\det(I - AA^T) = \det(I - A^T A)$，…………………… (11 分)

因此原命题成立．……………………………………………………………… (12 分)

(3) 证明：设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$，则 $\boldsymbol{a} = O_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$，$K(\boldsymbol{a}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}, i) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{20})$．$p$ 能表为 $x^2 + 5y^2$ 等价于 p 在 $K(\boldsymbol{a})$ 中完全分解，……………………………… (2 分)

等价于 p 模 20 的剩余类在 $K(\boldsymbol{a})$ 在 $K(\boldsymbol{a})/\mathbb{Q}$ 中对应的 $\mathbb{Z}_{20}^\times$ 的子群中，………… (4 分)

即 $\ker\chi_{-5} \cap \ker\chi_{-1} = \{1, 9\}$．3 和 7 不包含在子群中，所以对 $p \equiv 3, 7 \pmod{20}$，p 不能表为 $x^2 + 5y^2$．……………………………………………………………… (6 分)

再计算 K 的类数．K 中单位根只有 ± 1，而 $-1 \equiv 3 \pmod 4$，因此令 $N = 20$，有狄利克雷特征 $\chi : \mathbb{Z}_{20}^\times \to \{\pm 1\}$ 使得对不整除 20 的质数 p 有 $\chi(p) = (-5/p)$．列表：

x	1	3	7	9	11	13	17	19
$\chi(x)$	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1

用虚二次域的类数公式，得到 $h_K = \frac{w_K}{2}L(0, \chi) = 2$，理想类群同构于 C_2．… (8 分)

设 $p_1, p_2 \equiv 3, 7 \pmod{20}$，则 O_K 中的分解方式只能为 $(p_1) = \boldsymbol{a}_1\overline{\boldsymbol{a}_1}$，$(p_2) = \boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_2}$，且 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 是非主理想，进而有 $(p_1p_2) = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\overline{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}$，且 $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ 是主理想，因此 p_1p_2 可表为 $x^2 + 5y^2$．……………………………………………………………… (12 分)