临界生数学补弱训练（四）

命题：wlr　　lhl

校对：数学备课组

考试时间：2022 年 11 月 31 日 15:00 至 17:00

试卷共 6 页，22 题，满分 150 分．

一、单选题（本大题共 8 小题，总分 40 分）

1. 对一个有 n 项，项数从 1 开始的数列 $\{a_n\}$，称它的一项 a_k 为数列中的一个峰，当且仅当对任意 $i<k$ 都有 $a_i<a_k$．有 13 项的数列 $\{b_n\}$ 通项公式为 $b_n=\sin n$（$1\leqslant n\leqslant 13$），则 $\{b_n\}$ 有（　　）个峰．

A.　1;　　　　B.　2;　　　　C.　3;　　　　D.　4．

2. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(t)=\sin(\pi t)+\frac{1}{3}\sin(3\pi t)$ 的单调递增区间有（　　）．

A.　$\left[2k-\frac{1}{4},2k+\frac{1}{4}\right]$，$\left[2k+\frac{1}{2},2k+\frac{3}{4}\right]$ 和 $\left[2k+\frac{5}{4},2k+\frac{3}{2}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$;

B.　$\left[2k,2k+\frac{1}{4}\right]$，$\left[2k+\frac{1}{2},2k+\frac{3}{4}\right]$，$\left[2k+1,2k+\frac{5}{4}\right]$ 和 $\left[2k+\frac{3}{2},2k+\frac{7}{4}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$;

C.　$\left[2k+\frac{1}{4},2k+\frac{1}{2}\right]$，$\left[2k+\frac{3}{4},2k+\frac{5}{4}\right]$ 和 $\left[2k+\frac{3}{2},2k+\frac{7}{4}\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$;

D.　$\left[2k+\frac{1}{4},2k+\frac{1}{2}\right]$，$\left[2k+\frac{3}{4},2k+1\right]$，$\left[2k+\frac{5}{4},2k+\frac{3}{2}\right]$ 和 $\left[2k+\frac{7}{4},2k+2\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$．

3. 设 $S=\left\{n+m\sqrt{-5}\mid n,m\in\mathbf{Z}\right\}$，且 $A=\left\{\left(1+2\sqrt{-5}\right)n\mid n\in S\right\}$，$B=\left\{\left(1-2\sqrt{-5}\right)n\mid n\in S\right\}$，则 $\{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\mid n\in\mathbf{N}^+,a_i\in A,b_i\in B\}=$（　　）．

A.　$\{21n\mid n\in\mathbf{Z}\}$;　　B.　$\{21n\mid n\in S\}$;　　C.　$\{3n\mid n\in S\}$;　　D.　S．

4. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n^2=n$ 当且仅当 $a_n=1$．假设 $a_n\in\{0,1\}$，且对任意 N 都存在 $n>N$ 使得 $a_n=1$．下列说法中错误的是（　　）．

A.　若 $a_n=a_m=1$，则 $n-m$ 除以 4 的余数不为 2;

B.　对任意 n，$2\left(1+\sqrt{n-1}\right)\geqslant a_n(S_n+S_{n-1})$;

C.　若正整数 n 和 m 没有除 ±1 之外的公共因子，则 $a_{nm}=a_na_m$;

D.　若 n，m 和 $\frac{n+m}{2}$ 均为正整数，且 $n\neq m$，则 $S_{\frac{n+m}{2}}>\frac{S_n+S_m}{2}$．

5. 在 1948 年，信息论的奠基者香农 (Shannon) 在信息论中引入了熵的概念．在集合 S 中取值的随机变量 X 的熵定义为

$$H(X)=-\sum_{a\in S}\mathrm{P}(X=a)\ln\mathrm{P}(X=a).$$

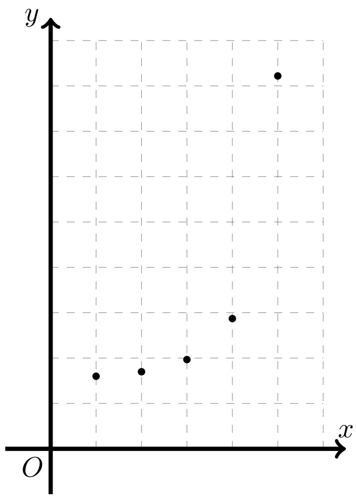
随机变量的熵可看作确定这个随机变量的取值期望获得的信息量．新高考数学考试设置两种选择题：单选题和多选题，每题均有四个选项．多选题的选项中不会没有正确答案、只有一个正确答案或全部都是正确答案．

假设一次数学考试的选择题题型与新高考一致，设置 8 道单选题和 4 道多选题，选择题部分总分为 60 分，选择题答案为每个可能答案是等概率的．为了使答对的考生获得分数

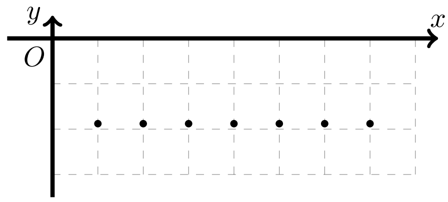
与其确定正确答案时获得的信息量尽量接近成正比（设单选题和多选题分值分别为 a 和 b，信息量分别为 c 和 d，使 $\left|\frac{ad}{bc}-1\right|$ 最小），下列每道单选题和多选题分别分值的安排中最好的是（　　）.

A.　单选题每题 3 分，多选题每题 9 分；　　B.　单选题每题 3.5 分，多选题每题 8 分；
C.　单选题每题 4 分，多选题每题 7 分；　　D.　单选题每题 4.5 分，多选题每题 6 分.

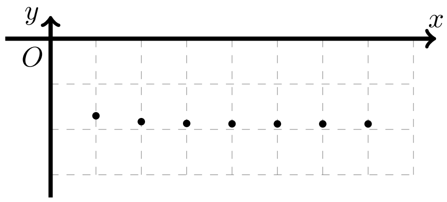
6. 已知 $f(x)=\frac{1}{3}(x^3+1)$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(a_{n-1})$. 把前几个形如 (n,a_n) 的点画在坐标系中，图像不可能为（　　）.（图中灰色虚线方格的边长为 1）



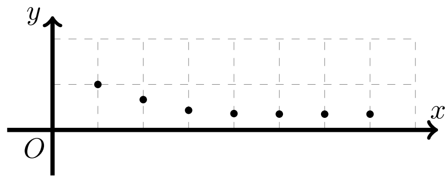
A.



B.



C.



D.

7. 设 $\zeta=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$（$n$ 为正整数），$S=\{a_0\zeta^0+a_1\zeta^1+\cdots+a_{n-1}\zeta^{n-1}\mid a_i\in\mathbf{Q}\}$. 若 $\sqrt{7}\in S$，则 n 的最小值是（　　）.

A.　6；　　B.　7；　　C.　14；　　D.　28.

8. 在 1734 年，瑞士著名数学家欧拉（Leonhard Euler）研究了用自然对数函数近似调和级数部分和误差的最小上界，Euler–Mascheroni 常数. 这个常数通常用 γ 表示. 前述的调和级数部分和为

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

可以证明对任意 $\varepsilon>0$ 都存在 N 使得对任意 $n>N$ 有 $\left|\frac{H_n}{\ln(n+1)}-1\right|<\varepsilon$. γ_n 定义为 $H_n-\ln(n+1)$，使得对任意 n 都有 $\gamma_n<M$ 的所有 M 中，最小的即为 γ.

在 1737 年，欧拉研究了类似的数列：

$$G_n=\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p},$$

其中 p 取遍不大于 n 的质数. 下列说法中错误的是（　　）.

A. 对任意大于 1 的整数 n，$\{H_n\}$ 不是整数；
B. $\gamma > 0.59$；
C. 对任意大于 1 的整数 n，$\{G_n\}$ 不是整数；
D. 存在 N 使得对任意 $n > N$ 有 $0.9\ln\ln n < G_n < 1.1\ln\ln n$.

二、多选题（本大题共 4 小题，总分 20 分）

9. 已知函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 的图像是一条连续不断的曲线，且满足以下性质：

(1) $f(1)=1$；

(2) 若 $0<x<1$，则 $f(x)f(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$；

(3) 对任意 $x>1$，$f(x)=(x-1)f(x-1)$.

有一个 f 有大量应用，如作为阶乘的延拓或用于计算 n 维单位球的体积．对某个 f，下列说法中正确的有（　　）.

A. 若 f 在 $\left[\frac{1}{2},3\right]$ 上先单调递减后单调递增，则对任意 $x,y>0$ 有 $\frac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\frac{x+y}{2}\right)$；
B. 若 $V_1=2$，$V_n=\frac{f(\frac{n+1}{2})f(1/2)}{f(\frac{n+2}{2})}V_{n-1}$，则不存在 M 使得对任意 n 有 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt[k]{V_k}<M$；
C. 定义在大于 1 的整数上，关于 n 的函数 $g(n)=\frac{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n-1}{n})}{5^{n/2}}$ 在 $n=4$ 处取最小值；
D. 存在 M 使得对任意正实数 a 和大于 1 的整数 n 都有 $a\ln a-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\ln f\left(a+\frac{k}{n}\right)<M$.

10. 已知 S 和 T 是复数集的子集且 $0\in S$，σ 是 S 到 T 的函数，满足：

(1) $\sigma(x)=0$ 当且仅当 $x=0$；

(2) 对任意 $x,y\in S$ 都有 $\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma(y)$.

下列说法中正确的有（　　）.

A. 若 $S=T=[0,+\infty)$，σ 的图像是一条连续不断的曲线，则所有 σ 都可表示为 $\sigma(x)=x^a$ $(a>0)$；
B. 若 $S=\mathbf{Q}$，$T=[0,+\infty)$，对任意 $x,y\in S$ 有 $\sigma(x+y)\leqslant\sigma(x)+\sigma(y)$，则对任意 $x,y\in S$ $(x\neq 0)$，存在正整数 n 使得 $\sigma(nx)>\sigma(y)$；
C. 设 $x_0=1,x_1,\cdots,x_4$ 是 $f(x)=x^4+4x-1$ 的四个根，S 和 T 均为所有四元有理系数多项式代入 x_1 至 x_4 后求值构成的集合．若对任意 $x,y\in S$ 有 $\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y)$，且对任意 $x\in\mathbf{Q}$ 有 $\sigma(x)=x$，则有 8 种不同的 σ（若两个函数在某个自变量上的取值不同，这两个函数就不同）；
D. 假设 $S=\mathbf{Z}$，$T=\mathbf{C}$，σ 不满足 (1) 但仍有 $\sigma(0)=0$．质数 p 是 σ 的周期，且对 p 不整除的整数 n 有 $\sigma(n^8)=1$．对不是完全八次方数的正整数 N，都存在 p 和 σ 使得 $\sigma(N)\neq 0,1$.

11. 已知 A 为 99 行 99 列的数表，A 中每个数都是 1 至 99 的整数．用 $A(a,b)$ 代表 A 中第 a 行第 b 列的数．A 满足如下性质：

(1) 对任意 k，$A(1,k)=A(k,1)=k$；

(2) A 的每一行、每一列中分别有且仅有一个 1；

(3) 对任意 i，j，k 有 $A(A(i,j),k)=A(i,A(j,k))$.

下列说法中正确的有（　　）.

A. A 中所有数之和为 50×99^2；

B. 对任意 i，j 有 $A(i,j)=A(j,i)$；

C. 有 $\frac{1}{60}\cdot 98!$ 种 A；

D. 有 $\frac{3}{160}\cdot 98!$ 种 A.

12. 已知有限非空集 S 是复数集的子集，$0\notin S$ 且对任意 $x,y\in S$ 有 $xy\in S$. 下列说法中正确的有（　　）.

A. $-1\in S$；

B. 可通过 $|S|$ 唯一确定 S；

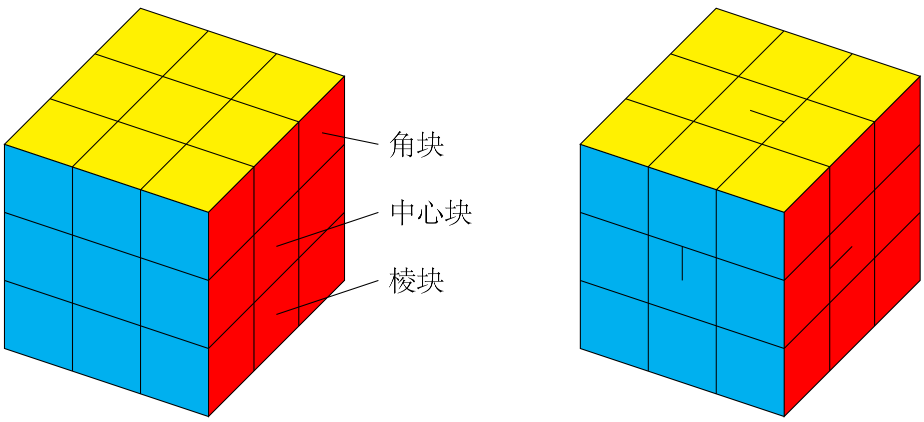
C. 定义 $G(S)=\left\{z \mid S=\left\{z^k \mid k\in\mathbf{Z}\right\}\right\}$，令在 $|S|=n$ 的条件下 $|G(S)|$ 的最大值为 a_n，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的第一至第 n 项和，则对任意 $\varepsilon>0$，都存在 N 使得对任意 $n>N$ 有 $\left|\frac{S_n}{n^2}-\frac{6}{\pi^2}\right|<\varepsilon$；

D. 若 $S\subseteq\left\{a+b\sqrt{n} \mid a,b\in\mathbf{Q}\right\}$，其中 n 为整数，则 $|S|$ 的最大值为 6.

三、填空题（本大题共 4 小题，总分 20 分）

13. 在 1974 年，匈牙利建筑学教授和雕塑家鲁比克 · 艾尔诺（Ernő Rubik）发明了最初的魔方，魔方的示意图见图 1a. 魔方由 8 个角块、12 个棱块和六个固定的中心块构成，六个中心块由轴连接起来，魔方每一面接触的四个棱块、四个角块以及一个中心块可以一起转动 90 度. 还原状态的魔方六个面都只有一种颜色，但每一面的颜色不同.

不计摆放方式的不同，从还原状态开始任意转动魔方，最多可以达到（　　）种状态. 同样不计摆放方式的不同，如果在每个中心块上画相异且没有非平凡旋转对称性的图案（如图 1b），则从还原状态开始任意转动魔方可以达到的状态中，中心块朝向与开始时相同的有（　　）种. （可以用算式作答）



(a) 还原的魔方及结构解释　　(b) 给中心块作的标记（例）

图 1: 一个普通魔方

14. 将仅顺序不同的方案视为一种，将 100 表示为每一个都不超过 3 的若干正整数之和有（　　）种方法. （用数字作答）

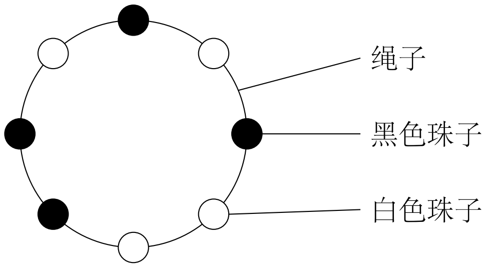


图 2: 一种可以制作的手链

15. 四个完全相同的黑色珠子和四个完全相同的白色珠子可以用绳子串成一只手链．若认为绳子恰好围成一个圆，且珠子均为球，均匀分布在圆周上，并将可以通过旋转或翻转完全重合的视为一种，则一共可以制作（　　）种手链．(图 2 是一种可做出的手链；用数字作答)

16. 如果将 $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ 表示为包含整数、四则运算、开平方根和开立方根操作的表达式，根号最深嵌套层数最小为（　　）．（记 x 的根号最深嵌套层数最小为 $H(x)$，则 $H(1)=0$，$H\left(\sqrt[3]{6-\sqrt{5}}\right)=2$，$H\left(\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\right)=1$，$H\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=1$）

四、解答题（本大题共 6 小题，总分 70 分）

17.（10 分）假设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为关于 n 的有理系数 m 次多项式 f，通分并消去公因数后分母为 d.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为整数列且质数 $p \mid d$，证明：$p \leqslant m$.

(2) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．证明：S_n 可表示为关于 n 的 $m+1$ 次有理系数多项式（记为 F），且 $F(0)=0$.

18.（12 分）设 $S=\{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}\}$，$S$ 中元素的加法和标量乘法均按分量进行，$\mathbf{0}=\overbrace{(0,0,\cdots,0)}^{n\text{个}0} \in S$．称一个函数 f 为 IP，当且仅当 f 满足：

(1) 对任意 $u,v \in S$，$f(u,v) \in \mathbf{R}$；

(2) 对任意 $u \in S$，$f(u,u)=0$ 当且仅当 $u=\mathbf{0}$；

(3) 对任意 $u \in S$，$u \neq \mathbf{0}$ 有 $f(u,u)>0$；

(4) 对任意 $u,v,w \in S$，$k \in \mathbf{R}$，$f(ku,v)=kf(u,v)$，$f(u+v,w)=f(u,w)+f(v,w)$，$f(u,v)=f(v,u)$.

有 $b_1,b_2,\cdots,b_m \in S$ 使得对任意 $u \in S$，存在唯一的 $v_1,v_2,\cdots,v_m \in \mathbf{R}$ 使得 $u=v_1b_1+v_2b_2+\cdots+v_mb_m$.

(1) 证明：$n=m$.

(2) 证明：若 f 和 g 为 IP，则

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(b_i,b_j)\cdot g(b_i,b_j) > 0.$$

19.（12 分）已知非退化圆锥曲线 C 有三条相异切线 l_1,l_2,l_3，切点分别为 P_1,P_2,P_3．设 $Q_1=l_2\cap l_3$，$Q_2=l_3\cap l_1$，$Q_3=l_1\cap l_2$.

(a) 小红的照片　　(b) 装球的瓶子

图 3: 第 20 题示意图

(1) 若 C 为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$, $S=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>1\right\}$, $T=\left\{(x,y)\ \middle|\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$, 请判断直线 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 是否共点．若共点，进一步判断交点是在 S 中，在 T 中，在 C 上还是有多种可能；若不共点，给出反例．

(2) 证明：三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 的外接圆恒过 C 的一个焦点（若 C 为圆，则为圆心），当且仅当 C 为抛物线．

20.（12 分）假设小红（化名，照片见图 3a）有 100 个球，上面分别写着 1 至 100 的数字．这些球除了写的数字以外完全相同．她将这些球放到一个瓶子里（如图 3b，示意图与题目表述有矛盾的情况下以题目表述为准），并蒙着眼拿出了一部分．拿出的球为所有球的每个子集概率相等．(可以用算式作答)

(1) 求拿出的球数量除以 3 余 1 的概率．

(2) 求在拿出的球数量除以 3 余 1 的条件下，拿出的球编号之和除以 3 余 2 的概率．

21.（12 分）有理数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足 $z_n=\frac{3x_n^2-43}{2y_n}$，$2x_n+x_{n+1}=z_n^2$，$y_n+y_{n+1}=z_n(x_n-x_{n+1})$，且 $y_1=\sqrt{x_1^3-43x_1+166}$．

(1) 若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 从下标相同的某项开始分别有周期，证明：$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$（从第一项开始就）分别有周期．

(2) 求出所有使得 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有相同最小正周期的 (x_1,y_1) 和对应的周期．

22.（12 分）本题为选做题，考生必须在下列小题中选至少两题作答，在所有选择的小题得分中取最低分即为本题得分．

(1)（选修 3–4：对称与群）设 G 为奇数阶群，x 为 G 中非单位元的元素．证明：x 与 x^{-1} 不共轭．

(2)（选修 4–2：矩阵与变换）设 A 为 n 行 m 列的矩阵，元素在某交换环 R 中．证明：

$$\left|E_n-AA^T\right|=\left|E_m-A^TA\right|,$$

其中 E_n 表示 $n\times n$ 的单位矩阵，$|M|$ 表示 M 的行列式．

(3)（选修 4–6：初等数论初步）设 p 为质数．证明：若 p 被 20 除余 3 或 7，则 p 不能表示为 a^2+5b^2 的形式（a 和 b 为整数），而 q 也为被 20 除余 3 或 7 的质数时，pq 则可以表示为 a^2+5b^2 的形式．